

~ Correction du baccalauréat S Polynésie ~  
10 juin 2011

**Exercice 1**

**5 points**

Commun à tous les candidats.

Méthode 1 :

Le dessin suggère de considérer la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Son écriture complexe est :  $z' - z_A = i(z - z_A) \iff z' - 2 + 5i = i(z - 2 + 5i)$ .

1. L'image B' du point B dans cette rotation a donc pour affixe :

$$z_{B'} - 2 + 5i = i(7 - 3i - 2 + 5i) \iff z_{B'} = 2 - 5i + 5i - 2 = 0.$$

L'image de B dans la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  est le point O. Ceci démontre que le triangle ABO est isocèle et rectangle en A.

Méthode 2 :  $OA^2 = |z_A|^2 = 2^2 + 5^2 = 29$ ;

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |7 - 3i - 2 + 5i|^2 = |5 + 2i|^2 = 25 + 4 = 29$$
;

$$OB^2 = |z_B|^2 = |7 - 3i|^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58.$$

D'une part  $AO^2 = AB^2 \iff AO = AB \iff ABO$  est isocèle en A ;

D'autre part  $29 + 29 = 58 \iff AO^2 + AB^2 = OB^2 \iff ABO$  est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode 3 :

$$\text{Soit } Z = \frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 5i}{5 + 2i} = \frac{i(2i + 5)}{2i + 5} = i.$$

$$\text{On a } Z = \frac{AO}{AB} = 1, \text{ soit } AO = AB;$$

De plus  $\arg(Z) = (\widehat{AB}, \widehat{AO}) = \frac{\pi}{2}$  ce qui montre que l'angle  $\widehat{BAO}$  est droit. Le triangle ABO est donc rectangle isocèle en A.

Méthode 4 :

$\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = i$  signifie que O est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

2. Soient A et B les points d'affixes respectives  $i$  et  $-2i$ .

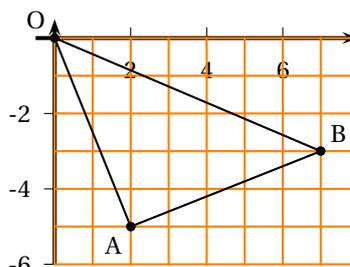
On a  $|z - i| = |z + 2i| \iff AM = BM \iff M \in \Delta$  médiatrice de [AB]. mais comme A et B appartiennent à l'axe des ordonnées, la médiatrice de [AB] (d'équation  $y = -\frac{1}{2}$  est parallèle à l'axe des abscisses. La proposition est vraie.

3.  $z = 3 + i\sqrt{3}$ , donc  $|z|^2 = 9 + 3 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{3}$ . On peut en factorisant ce module écrire :

$$z = 2\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z^{3n} = \left( 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{3n} = (2\sqrt{3})^{3n} e^{i\frac{3n\pi}{6}} = (2\sqrt{3})^{3n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$ . Or  $e^{i\frac{n\pi}{2}}$  est égal à  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  ou  $1$  suivant les valeurs de  $n$  et la puissance n'est donc un nombre imaginaire que pour  $n$  impair. La proposition est fausse.

4. Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\frac{\pi}{2}$ . On peut donc écrire  $z = \rho i$  avec  $\rho$  réel positif non nul.



Donc  $|i+z| = 1+|z| \iff |i+\rho i| = 1+|\rho i| \iff |i(1+\rho)| = 1+|\rho i| \iff 1+\rho = 1+\rho$   
qui est bien vraie.

La proposition 4 est vraie.

5. Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

Si le module de  $z$  est égal à 1 alors  $z$  s'écrit  $z = e^{i\theta}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

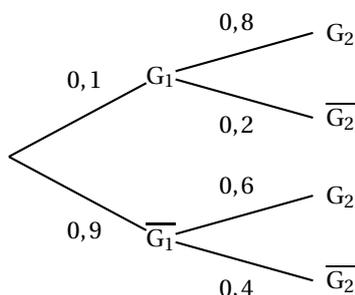
Donc  $z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + \frac{1}{e^{2i\theta}} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta + \cos 2\theta - i \sin 2\theta = 2 \cos 2\theta$  qui est un réel.

## Exercice 2

5 points

### Enseignement obligatoire

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. On a  $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$ .

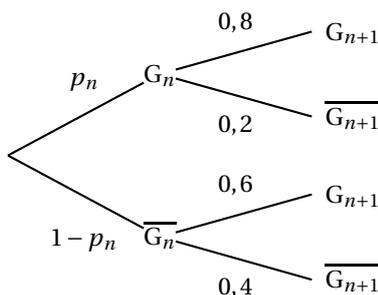
3. Il faut trouver  $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31}$ .

4. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à  $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$ .

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à

$$1 - 0,144 = 0,856.$$

5. À la partie  $n$ , on a l'arbre suivant :



On a donc  $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ .

6. *Initialisation* On a bien  $\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15-13}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = p_1$ .

*Hérédité*

Supposons qu'il existe  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$  tel que  $p_a = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^a$ .

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$$p_{a+1} = \frac{1}{5}p_a + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \left[ \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^a \right] + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^{a+1} = \frac{3}{20} + \frac{12}{20} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^{a+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^{a+1}. \text{ La propriété est vraie au rang } a+1.$$

On a donc démontré par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^n$ .

7. Comme  $-1 < \frac{1}{5} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4} = 0,75$ .

8. On a :  $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \frac{3}{4} - \left( \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^n \right) < 10^{-7} \iff \frac{13}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^n < 10^{-7} \iff \left( \frac{1}{5} \right)^n < \frac{4}{13} \times 10^{-7} \iff$  (par croissance de la fonction logarithme népérien)

$$n \ln \left( \frac{1}{5} \right) < \ln \left( \frac{4 \times 10^{-7}}{13} \right) \iff n > \frac{\ln \left( \frac{4 \times 10^{-7}}{13} \right)}{\ln \left( \frac{1}{5} \right)}.$$

$$\text{Or } \frac{\ln \left( \frac{4 \times 10^{-7}}{13} \right)}{\ln \left( \frac{1}{5} \right)} \approx 10,7.$$

Donc  $u_{11}$  approche la limite  $\frac{3}{4}$  à moins de  $10^{-7}$ .

## Exercice 2

5 points

### Enseignement de spécialité

1.  $u_1 = 10u_0 + 21$  or  $u_0 = 1$  donc  $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$  ;

$$u_2 = 10u_1 + 21 = 10 \times 31 + 21 = 331 ;$$

$$u_3 = 10u_2 + 21 = 10 \times 331 + 21 = 3331.$$

2. a.

- Initialisation  $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 = 3 \times 1 = 3u_0$  donc on a bien la propriété vraie au rang 0.

- Hérédité : Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,  $3u_n = 10^{n+1} - 7$  alors

$$3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10 \times (3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{(n+1)+1} - 70 + 63 = 10^{(n+1)+1} - 7$$

La propriété est donc bien héréditaire.

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout naturel  $n$  :  $3u_n = 10^{n+1} - 7$ .

b. Pour tout naturel  $n$ ,  $\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \sum_{k=0}^{k=n} 10^k$  donc  $3u_n = \sum_{k=0}^{k=n} 9 \times 10^k - 6 =$

$$\sum_{k=1}^{k=n} 9 \times 10^k + 10 - 6 = \sum_{k=1}^{k=n} 9 \times 10^k + 3 = 99 \dots 93 \text{ et donc } u_n = \sum_{k=1}^{k=n} 3 \times 10^k + 1 =$$

$$\underbrace{33 \dots 3}_n + 1 \text{ avec } n \text{ chiffres } 3.$$

$n$  chiffres

3.  $u_2 = 331$  avec  $\sqrt{331} \approx 18,2$  or 331 n'est divisible ni par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 : les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18.  $u_2$  est donc premier.

4. D'après 2.a., pour tout naturel  $n$ ,  $u_n = 33 \dots 31$  avec  $n$  chiffres 3

- Le chiffre des unités de  $u_n$  est 1, impair, donc 2 ne divise pas  $u_n$ .

- La somme de ses chiffres est  $3 + 3 + \dots + 3 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$  donc 3 ne divise pas  $u_n$ .

- Le chiffre des unités de  $u_n$  est 1, différent de 0 et 5, donc 5 ne divise pas  $u_n$ .
  - a.  $10 \equiv -1 + 11$  et  $-7 \equiv 4 - 11$  donc  $10 \equiv -1$  et  $-7 \equiv 4$  (modulo 11),  
donc  $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv (-1)^1(-1)^n + 4 \equiv 4 - (-1)^n$  (modulo 11)
  - b. Si  $u_n$  était divisible par 11 alors  $3u_n$  le serait a fortiori, or pour  $n$  pair  $3u_n \equiv 4 - 1 \equiv 3$  (modulo 11) et pour  $n$  impair  $3u_n \equiv 4 - (-1) \equiv 5$  (modulo 11) donc 11 ne divise pas  $u_n$ .
- 5.
  - a. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 16 donc d'après le petit théorème de Fermat,  $10^{16} \equiv 1$  (modulo 17).
  - b. Pour tout naturel  $k$ ,  $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 = (10^{16})^k \times 10^9 - 7 \equiv 1^k \times 10^9 - 7$  (modulo 17). Or  $6 \times 17 = 102$  donc  $10^2 \equiv -2$  (modulo 17) donc  $10^9 = 10 \times (10^2)^4 \equiv 10(-2)^4 \equiv 10 \times 16 \equiv 10(-1) \equiv -10$  et donc  $3u_{16k+8} \equiv -10 - 7 \equiv -17 \equiv 0$  (modulo 17) donc 17 divise  $3u_{16k+8}$ . Or 17 est premier avec 3 et d'après le théorème de Gauss, 17 divise  $u_{16k+8}$ .

### Exercice 3

5 points

#### Enseignement obligatoire

**Partie A : Restitution organisée de connaissances** On supposera connus les résultats suivants :

Démonstration classique basée sur l'intégrale de la fonction continue  $(uv)' = u'v + uv'$ .

#### Partie B

1.
  - a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  entraînent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
  - b.  $f$  produit de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  est dérivable sur cet intervalle et  

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$
 Or  $x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $2 \ln x + 1$  et :  
 $2 \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff$  (par croissance de la fonction exponentielle)  $x > e^{-\frac{1}{2}}$ .  
 Donc  $f$  est croissante sur  $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ .  
 De même  $2 \ln x + 1 < 0 \iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff$  (par croissance de la fonction exponentielle)  $x < e^{-\frac{1}{2}}$ .  
 Donc  $f$  est décroissante sur  $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ .  
*Rem.* On peut écrire  $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .
2. Une équation de la tangente  $(\mathcal{T}_{x_0})$  à  $(\mathcal{C})$  en un point de coordonnées  $(x_0; x_0^2 \ln x_0)$  est :  

$$M(X; Y) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff Y - (x_0^2 \ln x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$
 En particulier  $O(0; 0) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff 0 - (x_0^2 \ln x_0) = x_0(2 \ln x_0 + 1)(0 - x_0) \iff$   
 $-x_0^2 \ln x_0 = -2x_0^2 \ln x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 + x_0^2 \ln x_0 = 0 \iff x_0^2(1 + \ln x_0) = 0 \iff$   
 $1 + \ln x_0 = 0$ , car la solution  $x_0 = 0$  n'est pas possible.  
 Finalement :  $1 + \ln x_0 = 0 \iff \ln x_0 = -1 \iff x_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .  
 Il existe donc une tangente unique  $(\mathcal{T}_{e^{-1}})$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  passant par O. Une de ses équations est :

$$M(x; y) \in (\mathcal{T}_{e^{-1}}) \iff Y = -\frac{1}{e}X.$$

3. a. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$ . Cette fonction produit de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  est dérivable et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{5x^4}{25}(5 \ln x - 1) + \frac{x^5}{25} \times \frac{5}{x} = x^4 \ln x - \frac{x^4}{5} + \frac{x^4}{5} = x^4 \ln x.$$

Conclusion la fonction  $g$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto x^4 \ln x$  sur  $]0; +\infty[$ .

b. On a  $V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi [x^2 \ln x]^2 dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi x^4 \ln x \times \ln x dx.$

$$\text{Soient } \begin{cases} u'(x) = x^4 \ln x \\ v(x) = \ln x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

4. On a donc en intégrant par parties puisque toutes les fonctions  $u(x)$ ,  $u'(x)$ ,  $v(x)$  et  $v'(x)$  sont continues sur  $]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[ \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \times \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \times \frac{1}{x} dx = \pi \frac{1}{25} \left[ x^5(5 \ln x - 1) \times \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \\ &\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 5x^4 \ln x dx + \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 5x^4 dx = \pi \frac{1}{25} \left[ 0 - \left( \frac{6}{e^5} \right) \right] - \pi \frac{1}{25} \left[ \frac{5x^5}{25}(5 \ln x - 1) - \frac{1}{5}x^5 \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \\ &-\frac{6\pi}{25e^5} - \frac{\pi}{25} \left[ \frac{1}{5}(5 \ln 1 - 1) - \frac{1}{5} \right] - \left[ \frac{1}{5e^5} \left( 5 \ln \frac{1}{e} - 1 \right) - \frac{1}{5e^5} \right] = -\frac{6\pi}{25e^5} - \frac{\pi}{25} \left[ -\frac{2}{5} - \left( -\frac{7}{5}e^5 \right) \right] = \\ &\frac{2\pi}{125} - \frac{37\pi}{125e^5} = \frac{\pi}{125} \left( 2 - \frac{37}{e^5} \right). \end{aligned}$$

### Exercice 4

5 points

#### Enseignement obligatoire

##### Partie A

1. Comme  $1 + 2 \neq 0$ ,  $K$  existe et est défini par  $\overrightarrow{1KD} + 2\overrightarrow{2KF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DF} \iff \overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$

Comme  $D(0; 0; 0)$  et  $F(1; 1; 1)$ , l'égalité précédente donne :

$$x_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$y_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$z_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc } K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

2.  $E(1; 0; 1)$  donc  $\overrightarrow{EK} \left( -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right)$  et  $\overrightarrow{DF}(1; 1; 1)$ .

$$\text{Donc } \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. On a  $EK^2 = \|\overrightarrow{EK}\|^2 = \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EK} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} \Rightarrow EK = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

##### Partie B

1. Quel que soit le point  $M$ , la base  $EMF$  du tétraèdre  $EMFD$  est incluse dans la face supérieure du cube  $EFGH$  qui est perpendiculaire à l'arête  $[DH]$  qui est donc une hauteur du tétraèdre relative à la base  $EMF$ .

Quelle que soit la position du point  $M$ , l'aire de la base est l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur  $[EH]$  dont la longueur est aussi 1. On a donc :

$$\mathcal{A}(EMH) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où le volume cherché : } \mathcal{V}(EMFD) = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Par définition de  $M$ ,  $M$ ,  $F$  et  $D$  ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan unique.

On a  $M(0; m; 1)$ ; donc  $M(0; m; 1) \in MFD \iff (-1+m) \times 0 + m - m \times 1 = 0$  qui est vraie.

$F(1; 1; 1)$ ; donc  $E(1; 0; 1) \in MFD \iff (-1+m) \times 1 + 1 - m \times 1 = 0$  qui est vraie.

Enfin  $D(0; 0; 0) \in MFD \iff (-1+m) \times 0 + 0 - m \times 0 = 0$  qui est vraie.

Conclusion :  $(-1+m)x + y - mz = 0$  est bien une équation du plan ( $MFD$ ).

3. a. On sait que  $d_m = d(E; (MFD)) = \frac{|(-1+m)x_E + y_E - mz_E|}{\sqrt{(-1+m)^2 + 1^2 + m^2}} =$

$$\frac{|(-1+m+0-m)|}{\sqrt{1+2m^2-2m+1}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}.$$

- b. La distance maximale correspond à la valeur minimale de  $\sqrt{2m^2-2m+2}$  c'est-à-dire du trinôme  $2m^2-2m+2$ .

$$\text{Or } 2m^2-2m+2 = 2(m^2-m+1) = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right] = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

La valeur minimale de cette somme de deux carrés est obtenue quand le premier carré est nul, soit quand  $m = \frac{1}{2}$  (valeur possible puisque

$0 \leq m \leq 1$ ) et le minimum vaut alors  $\frac{3}{2}$ .

La distance minimale est donc égale à  $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

- c. Or  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = EK$ .

D'autre part on sait que le barycentre  $K$  appartient à la droite  $(DF)$  donc au plan ( $MFD$ ).

Lorsque la distance du point  $K$  au plan ( $MFD$ ) est maximale, soit quand  $M$  est le milieu de  $[HG]$ , le point  $K$  est le projeté orthogonal du point  $E$  sur le plan ( $MFD$ ).

